

森林資源管理における最適化モデルの展開 (II)

—森林単位での最適化モデル—

吉本 敦, 木島 真志

前稿では、経営体の最小単位となる“林分単位での最適化モデル”について詳説した。本稿では、複数の林分からなる森林単位の最適化モデルについて、これまで展開されてきた古典から近年まで、その関連研究について著者の視点から詳説する。

キーワード：伐採計画最適化, 線形計画法, 混合 0-1 整数計画法

1. 古典的な森林単位の問題：許容伐採量の探索

歴史的に多くの注目を集めていたもう一つの問題は、森林単位において許容伐採量 (Allowable Cut: AC) を如何に決定するかというものである。鈴木 [1] の収穫予定論にさまざまな決定法が示されている。大別すると三つに分かれる。一つが森林面積の制御による区画輪伐法 (Area Control), 二つ目が材積配分法などの材積の制御による決定法 (Volume Control), そして、その折衷方法 (Volume-Area Check) である。

区画輪伐法は、与えられた森林を 1 回の伐期内で、各期同じ面積を伐採することにより、現存の森林を制御されたものにするを目的としている。均一の林分からなる森林であれば、許容伐採量の決定と伐採の配分は簡単に行うことができる。伐期齢を決定すれば各期で伐採される面積は総面積を伐期齢で割れば簡単に求められる。この方法では林分の伐採ルールとして、「最も古い林分から伐採する」が採用される。したがって、それぞれの林分の林齢と材積がわかれば、どの林分をいつ伐採し、各期どれだけの伐採量があるかを計算することができる。

材積を制御する方法では、計画期間での伐採量を一定にするように計画が立てられる。この種の方法にはさまざまな公式が開発された。その代表的なものには材積配分法をはじめ、Grosenbaugh 式, Hundeshagen 式, Von Mantel 法, Hanzlik 式, オーストリア式など

がある。

面積・材積を制御する折衷法は上記二つを組み合わせたすべてのものを含む。それゆえ、必要とする情報如何によりさまざまな方法が考案できる。この方法の特徴は、最終的な解がどちらの基準も満たすということである。たとえば、得られた解が現存の森林の伐採に必要な計画期間が希望する期間と一致するかどうか、そして各期の伐採面積が許容できるかどうかなどがチェックされ、もしそれらの条件を満たさなければ、再度解の探求が行われる。したがって、コンピュータプログラミングによる解の探求が必要不可欠となる。

2. 確率過程の応用と収穫予測

古典的なアプローチとは別に国レベルの収穫予測を行うために確率過程を用いたアプローチが 1960 年代初期に発表された。当時、科学技術庁資源局よりわが国の木材収穫を予測するマクロ的な課題が林学研究者に問われた。そこで鈴木 [2, 3] が世界で初めて確率過程を駆使した方法を提示した。鈴木 [4] 氏は、齢級ごとで伐採される割合を“減反率”と定義し、マルコフ連鎖の出生死滅過程 (birth-death process) を応用することにより、各齢級における伐採-成長の過程を表現し、将来的な林齢の遷移と収穫の予測が可能になることを示した (図 1)。なお、齢級とは林齢を単位年数 (日本では 5 年, アメリカでは 10 年) でくくった森林の年齢を表現したものである。

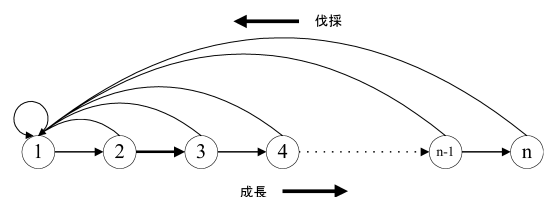


図 1 単純マルコフ連鎖による伐採プロセス

よしもと あつし
統計数理研究所
〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3
yoshimoa@ism.ac.jp
このしま まさし
琉球大学農学部
〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1 番地
konoshim@agr.u-ryukyuu.ac.jp

第 t 期において、第 i 林齢の森林は次の期には確率 $p_{i,i+1}^t$ で第 $(i+1)$ 林齢に遷移する。すなわち、

$$p_{i,i+1}^t = \Pr\{y_{t+1} = i+1 \mid y_t = i\}$$

y_t は第 t 期の林齢状態を表す変数である。したがって、その補完の確率 $(1 - p_{i,i+1}^t)$ は、第 t 期から第 $(t+1)$ 期に遷移する間に第 i 林齢の森林が伐採される確率となる。なお、ここでは期間間隔と林齢間隔、また齢級の林齢の単位は同じとしている。また、伐採後は即座に再造林されるものとし、その状態を第 1 林齢と表す。このように y_t の遷移過程を定義すると図 1 のような単純マルコフ連鎖により林齢の遷移の様子を表現することができる。

次に $(n \times n)$ の林齢の遷移確率行列を定義する。この行列は林齢状態の遷移を描写するものであり、それぞれの状態から次の状態にどれだけの割合が遷移するかを示すものである。

$$\mathbf{P}_t = \begin{pmatrix} p_{1,1}^t & p_{1,2}^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{2,1}^t & 0 & p_{2,3}^t & 0 & \cdots & 0 \\ p_{3,1}^t & 0 & 0 & p_{3,4}^t & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

この林齢の遷移確率行列を用いると、現状がわかれば、将来的な林齢の状態が下記により予測可能となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_{t+1} &= \mathbf{X}'_t \cdot \mathbf{P}_t \\ (x_1^{t+1} x_2^{t+1} x_3^{t+1} \cdots x_n^{t+1}) &= (x_1^t x_2^t x_3^t \cdots x_n^t) \\ &\cdot \begin{pmatrix} p_{1,1}^t & p_{1,2}^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{2,1}^t & 0 & p_{2,3}^t & 0 & \cdots & 0 \\ p_{3,1}^t & 0 & 0 & p_{3,4}^t & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで \mathbf{X}_t は第 t 期の各林齢ごとの森林面積ベクトルを表し、 $'$ は転置を示す。仮に各林齢に対する単位面積当たりの収穫材積がわかれば、木材供給量 V_t の予測も以下の式により可能になる。

$$V_t = \sum_{i=1}^n v_i \cdot x_i^t \cdot p_{i,1}^t \quad (3)$$

ただし、 v_i は第 i 林齢における単位面積当たりの材積を示す。このように、現在の各林齢ごとの森林面積とその伐採される確率、さらに単位面積当たりの材積がわかれば、

単純マルコフ連鎖の下で、林齢の遷移確率行列を用いて、将来的な木材供給量の予測が可能になる訳である。

ここで問題となるのは、各林齢の遷移確率行列をどのように推定するかである。今、森林が植林され、丁度第 i 齢級で伐採される、すなわち第 i 林齢から第 $(i+1)$ 林齢になるまでに伐採される確率を第 i 齢級の減反率 q_i と定義する。その結果、第 i 林齢の森林 ($y_t = i$) が第 $(i+1)$ 林齢になる前に伐採される確率は下記の条件付き確率で表され、この確率が上記林齢の遷移確率行列の要素となる。

$$\begin{aligned} p_{i,1}^t &= \Pr\{y_{t+1} = 1 \mid y_t = i\} \\ &= \frac{\Pr\{y_{t+1} = 1, y_t = i\}}{\Pr\{y_t = i\}} \\ &= \frac{q_i}{1 - \sum_{k=1}^{i-1} q_k} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで減反率と区別するために、この確率を第 i 齢級の伐採率としている。減反率が植林後それぞれの齢級で森林が伐採される確率で、伐採率は植林後の各林齢まで成長し、次の林齢になる前に伐採される確率である。鈴木氏は樹木の直径成長を単純なポアソン過程で表し、次に森林所有者の伐採行動を“直径がある望む径に達したら伐採する”とし、この待ち時間が、植林されてから伐採されるまでの時間となり、ある齢級において望む径に成長し伐採される割合、すなわち“減反率”がガンマ分布から算出できるとした。

実際、わが国では、全国森林計画に即して各地域で作成される地域森林計画において、ガンマ分布を仮定した減反率分布と地域の齢級別森林面積を示した森林資源構成表から、長期の森林資源量の変動を予測している [5]。藤掛 [6] はガンマ分布の推定法の最尤法による改良を試みた。しかし、根本的に実際の伐採傾向とガンマ分布に基づく減反率からなる伐採傾向に大きな乖離があることが指摘された [7, 8]。その後、減反率を推定するモデルの改良が Yoshimoto [9–11] により行われた。いずれにせよ、今日ではポアソン過程–待ち時間問題、マルコフ連鎖による出生死滅過程は一般的な確率過程の教科書では当たり前のように出てくる例題ではあるが、当時、鈴木氏がそれらを組合せ林学への応用の道を開拓したという点はほかに例を見ない。

3. 森林単位での最適化モデル（線形計画法・混合 0-1 整数計画法の応用）

さて、70 年代に入ると、許容伐採量の探求とともに

表 1 計画期間 10 期最小伐期齢 6 期の実行可能施業案

施業番号	変数	係数	計画期間									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X_{i1}	C_{i1}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	X_{i2}	C_{i2}	1	0	0	0	0	0	6	0	0	0
3	X_{i3}	C_{i3}	1	0	0	0	0	0	0	7	0	0
4	X_{i4}	C_{i4}	1	0	0	0	0	0	0	0	8	0
5	X_{i5}	C_{i5}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	9
6	X_{i6}	C_{i6}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	X_{i7}	C_{i7}	0	1	0	0	0	0	0	6	0	0
8	X_{i8}	C_{i8}	0	1	0	0	0	0	0	0	7	0
9	X_{i9}	C_{i9}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8
10	X_{i10}	C_{i10}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
11	X_{i11}	C_{i11}	0	0	1	0	0	0	0	0	6	0
12	X_{i12}	C_{i12}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	7
13	X_{i13}	C_{i13}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
14	X_{i14}	C_{i14}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	6
15	X_{i15}	C_{i15}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
16	X_{i16}	C_{i16}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	X_{i17}	C_{i17}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
18	X_{i18}	C_{i18}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
19	X_{i19}	C_{i19}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
20	X_{i20}	C_{i20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

施業案

に伐採計画の最適化問題について線形計画法の適用が本格的に展開され始めた。伐採計画問題に対する線形計画法の最初の応用については、諸説あると思われるが [12]、なかでも Johnson and Scheurman [13] が提案した Model I と Model II は今日の伐採計画問題の基本となっている [14]。当初はコンピュータのパワー不足で対象とする数百あるいは数千にも及ぶ林分からなる森林に対し、森林を樹種、樹齢、林道などの類似状態によって区分層 (Strata) に分類し、問題規模の縮小化を図っていた。Model I と Model II の違いは同じ区分層あるいは林分に対して時期の異なる複数の伐採をどのように捉えるかにある。計画期間内で 1 回しか伐採を考慮しなければこれらのモデルに違いはない。定式化に当たっては、グルーピングされたそれぞれの区分層に対し、いつどれだけの面積を伐採するのかを決定するため、それに対応するような決定変数を考える必要がある。そこで、Model I では与えられた計画期間内で考え得る伐採パターンを想定し、それぞれのパターンに対して、どれだけの面積を割り当てるかを定めることにより、全体の問題を定式化する。それぞれのパターンを各区分層に対する施業案 (treatment) とすると、たとえば、計画期間 10 期の場合、最小伐期齢 (伐採を行える最小の齢級) を 6 期とすれば、表 1 のように 20 の伐採のパターンが考えられる。表内の 0 は何もしないことを意味し、1 は現存の森林の伐採、そして 1 より大きな数字は再生林後の伐採を意味し、その番号は伐採される齢級を示す。なお、一般に伐採計

画は 5 年ごと、あるいは 10 年ごとを単位とするため、毎年の単位ではなく、1 期 = 5 年または 10 年として計画を立てる。このような意味合いからも、線形計画法による計画は長期的な方向性を示すものとして捉えられていた。表 1 で 1 回だけ伐採される施業案が 1, 6, 10, 13, 15~20 であり、それぞれ第 1 期目から順次 10 期目の伐採に対応する。最小伐期齢を 6 期とすれば、計画期間内では最大 2 回の伐採が可能となる。上記以外の施業番号が 2 回の伐採を伴う施業案である。それぞれの区分層に対し、考えられる施業案を構築し、一つ一つの施業案に対応する森林面積が決定変数となる。

決定変数 $\{x_{ij}$: 第 i 番目の区分層における第 j 番目の施業案適用の森林面積割合}

決定変数が決まれば、次は目的関数において決定変数に対応する係数 $\{c_{ij}\}$ を推定する。たとえば収益の最大化であれば、それぞれの施業案から計画期間内で得られるであろう単位面積当たりの収益を算出すればよい。単純に考えれば、まず各区分層における材積成長曲線から伐採が可能な期における ha 当たりの材積を算出する。次に立木から丸太への歩留まりを掛けることにより、搬出可能な材積を推定し、立米当たりの丸太価格を掛けることにより、各期での伐採から得られる ha 当たりの収益がだいたい算出できる。したがって、複数回の伐採に対しては各伐採に対応する収益を合計することにより、決定変数の係数が算出でき、目的関数が下記のように特定できる。ただし、 N は区分

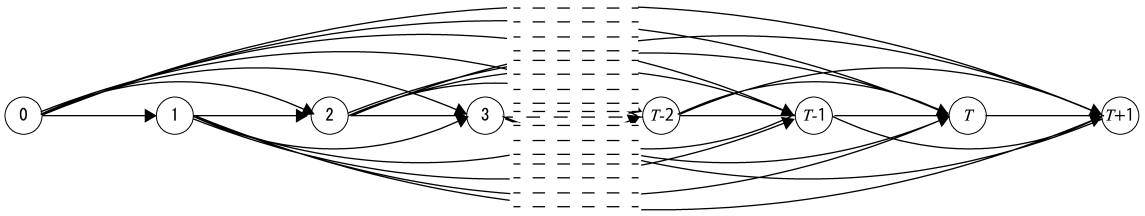


図2 Model IIにおける伐採連鎖のネットワーク (Yoshimoto and Asante [15])

層の数を示す。区分層の現時点における樹齢が最小伐期齢に達していない場合は、係数 $\{c_{ij}\}$ を 0 にすればよい。

$$\max \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{20} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (5)$$

目的関数が定義されれば、次は制約条件を考える必要がある。一般的な伐採計画では計画期間内での森林の売買は想定しないため、森林面積に対する制約が発生する。すなわち、現在の与えられた森林に対して計画を組む。決定変数が各施業実施の森林面積であるので、各区分層に対応する決定変数の総和がその区分層の総面積以下であればよい。

$$\sum_{j=1}^{20} x_{ij} \leq L_i \quad \forall i \quad (6)$$

ただし、 L_i は第 i 番目の区分層の森林面積である。

次に採用される制約には、計画期間を通した伐採量に関するものがある。雇用の持続性などを考慮すれば、期間ごとの伐採量の急激な増減は望ましくないという理由から伐採量はなるべく一定あるいは減少しないという制約が課せられる。各施業案において、1 回目の伐採かそれ以降の伐採かで伐採量は異なるが、材積の成長予測により、伐採量の算出が可能になる。その結果、たとえば v_{ij}^t を t 期における i 番目の区分層で j 番目の施業を行って得られる伐採量とすれば、 i 番目の区分層から t 期に得られる伐採量 V_i^t は下記で計算できる。

$$V_i^t = \sum_{j=1}^{20} v_{ij}^t \cdot x_{ij} \quad (7)$$

その結果、伐採量に関する制約は下記のようになる。

$$\sum_{i=1}^N V_i^t = v_0, \quad t = 1, \dots, T \quad (8)$$

ただし T は計画期間で、 v_0 は一定伐採量である。その他の制約としては計画期の最後の状態に対する資源量

の制約がある。これは、少なくとも計画期後の将来的な経営の再開を可能とするような制約と考えることができる。また、最後の計画期における林齢分布に対する制約も考慮できる。現在は昭和 30 年代の拡大造林の影響もあり、日本全体の人工林の林齢分布が 50 年生あるいは 60 年生に偏っている。こうした偏りは、生物多様性の観点から見れば、あまり好ましい状態とはいえない。それよりは若齢林から老齢林まで満遍なく森林が分布している方が多様性があるともいえる。そうした条件に対してもここで定義した決定変数を用いて定式化が可能である。なお、Model I では、一つのマネジメントユニットである区分層に対し計画期間内で考えられる施業案を想定し、それぞれの施業案に対し目的を達成するように伐採計画が行われる。したがって、計画期間内では区分層内の森林が他の区分層に移行することは考えられていない。

一方、Model II では、計画期間内で一部の森林の区分層から他の区分層に移行することも考慮できる。Model II の決定変数は各期における伐採施業面積とし、同一区分層における複数の伐採については、伐採連鎖のネットワークを使用し規制している。図 2 に Model II で考慮される伐採連鎖のネットワークを示す。

ノード 0 が始点でノード $(T + 1)$ が終点となる。その他の番号は伐期を表す。伐採の連鎖を表現するために、一連の植林-伐採を考え、第 i 番目の区分層で s 期に植林された森林が t 期に伐採される決定変数を x_{st}^i とする。ただし、伐採は $t = T$ まで有効で、 $t = T + 1$ の場合、 T 期まで伐採されないことを意味する。たとえば i 番目の区分層に対し現状の森林を 1 期目で伐採する施業の決定変数は x_{01}^i となり、その後 1 期目で植林され T 期目で伐採する施業は x_{1T}^i となる。このような伐採の連鎖を規制することにより複数の伐採を取り扱うことができる。 x_{0t}^i は現状の森林が t 期で伐採される施業に対する決定変数である。したがって、ある区分層に対し、下記の制約により一連の伐採の連鎖を制御できる。なお、 k は最小伐期齢である。

表2 Model I と Model II の定式

Model I	Model II
$\max \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H c_{ih} \cdot x_{ih}$	$\max \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T+1} \sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} c_{st}^i \cdot x_{st}^i$
$\sum_{h=1}^H x_{ih} \leq L_i, \quad \forall i$	$\sum_{t=1}^{T+1} x_{0t}^i = L_i, \quad \forall i$
$\sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H v_{ih}^t \cdot x_{ih} = v_0, t = 1, \dots, T$	$\sum_{i=1}^N \sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} v_{st}^i \cdot x_{st}^i = v_0, t = 1, \dots, T$
	$\sum_{\tau=0}^{\max(0,s-k)} x_{\tau s}^i = \sum_{t=\min(s+k,T+1)}^{T+1} x_{st}^i, \quad \forall i, s = 1, \dots, T$

注 N : 区分層数, H : 施業数, T : 計画期間, k : 最小伐期齢

$$\sum_{\tau=0}^{\max(0,s-k)} x_{\tau s}^i = \sum_{t=\min(s+k,T+1)}^{T+1} x_{st}^i, \forall i, s = 1, \dots, T \quad (9)$$

$$\sum_{t=1}^{T+1} x_{0t}^i = L_i, \forall i \quad (10)$$

伐採量に関する制約についても下記で対応できる。

$$\sum_{i=1}^N \sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} v_{st}^i \cdot x_{st}^i = v_0, \quad t = 1, \dots, T \quad (11)$$

ここで v_{st}^i は i 番目の区分層が s 期で植林され t 期で伐採されるときの伐採量である。Model I 同様に他の制約もここで定義する決定変数により対応できる。目的関数は下記のように定式化する。

$$\max \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T+1} \sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} c_{st}^i \cdot x_{st}^i \quad (12)$$

ここで c_{st}^i は i 番目の区分層が s 期で植林され t 期で伐採される際の貢献あるいは収益の現在価値などである。表2に Model I と Model II の定式を示す。

森林資源を取り巻く社会ニーズは、これまでの伐採量の維持による地域雇用の確保だけでなく、環境保全を訴える傾向が出てきた。米国では1969年に制定された国家環境政策法 (National Environmental Policy Act) に基づき国有林の森林計画策定段階において環境アセスメントが求められるようになった。そこで、アメリカの国有林を管理する森林局 (Forest Service) は管理計画の策定に際して、上記 Model I と Model II を採用した FORPLAN (FORest PLANning) と呼ば

れる伐採計画最適化モデルを開発し [16]、さまざまな社会ニーズに対応するようになった。FORPLAN は基本的にソルバーのインプットファイルを生成するモデルで、水源地の保全や野生動物の保護面積などを制約条件として導入することで、木材生産といった経済活動が環境保護に及ぼす影響について線形計画法の枠組みで定量的に評価することを可能とした。

$$\text{Model I: } \sum_{i=1}^N x_{i0} \geq \tilde{L}; \quad \text{Model II: } \sum_{i=1}^N x_{0(T+1)}^i \geq \tilde{L} \quad (13)$$

\tilde{L} は保護面積、 x_{i0} 、 $x_{0(T+1)}^i$ はそれぞれ Model I と Model II での無伐採面積である。上記のように環境問題を木材生産に対する制約として捉えるのではなく、それら森林の保有する環境的な機能も同時に最適化の一部とする多目的計画法の応用研究も展開されている [17]。

区分層を利用した FORPLAN が実際の森林管理に利用されるようになってから、伐採を担う現場から、「どの場所の林分を伐採するのか」といった疑問が浮上してきた。そこで線形計画法から混合 0-1 整数計画法への移行が始まった。Model I, Model II の伐採施業に関わる決定変数、係数を i 番目の区分層から i 番目の林分としパイナリー変数に置き換え、伐採量制約を変動許容率 α を用いて調整すれば表3のように離散型 Model I と Model II が構築できる。

3.1 混合 0-1 整数計画法による隣接問題への対応 (Unit Restriction Model)

80年代後半に入りマダラフクロウ保護などさまざまな野生動物保護問題が浮上した。その中で注目された

表 3 離散型 Model I と Model II の定式

離散型 Model I	離散型 Model II
$\max \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H L_i \cdot c_{ih} \cdot x_{ih}$	$\max \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T+1} \sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} L_i \cdot c_{st}^i \cdot x_{st}^i$
$\sum_{h=1}^H x_{ih} \leq 1, \quad \forall i$	$\sum_{t=1}^{T+1} x_{0t}^i = 1, \quad \forall i$
$(1 - \alpha) \cdot v_0 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H L_i \cdot v_{ih}^t \cdot x_{ih} \leq (1 + \alpha) \cdot v_0, t = 1, \dots, T$	$(1 - \alpha) \cdot v_0 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} L_i \cdot v_{st}^i \cdot x_{st}^i \leq (1 + \alpha) \cdot v_0, t = 1, \dots, T$
	$\sum_{\tau=0}^{\max(0,s-k)} x_{\tau s}^i = \sum_{t=\min(s+k,T+1)}^{T+1} x_{st}^i, \quad \forall i, s = 1, \dots, T$
$x_{ih} \in \{0, 1\}, \forall i, \forall h$	$x_{st}^i \in \{0, 1\}, \forall i, \forall s, \forall t$

注 N : 林分数, H : 施業数, T : 計画期間, k : 最小伐期齢

のが大面積皆伐や森林に生息する野生動物の生息地の分断・劣化の回避を狙った隣接制約 (adjacency constraint) であった。後に、この種の制約を扱ったモデルを Unit Restriction Model (URM) と呼ぶようになった [18]。この制約では、“隣接し合う林分同士の同時期伐採は不可”とした。基本的に隣接するもの同士の伐採を回避する隣接対 (pairwise) の制約式 ($x_i + x_j \leq 1$) で十分であったが、当時は PC の容量も少なく、それゆえ“如何に少なく制約式を設定できるか”の議論が進んだ (文献 [19] など)。この制約の延長が緑化再生制約 (green-up constraint) というもので隣接の林分の伐採の遅延により伐採箇所の緑化再生を促すものである。伐採の遅延の期間が 1 期間であれば、隣接制約と同じになる。表 4 に隣接制約を考慮したそれぞれのモデルを示す。Model I では施業隣接行列 (activity adjacency matrix) [20] という施業間で緑化再生期間の同時期伐採を (0,1) の要素 a_{hl}^v で示した行列を導入し、下記制約で対応する。

$$a_{hl}^v \cdot x_{ih} + a_{lh}^v \cdot x_{jl} \leq 1, \forall j \in \mathbb{NB}_i, \forall i, \forall l (\neq h), \forall h \quad (14)$$

なお、 \mathbb{NB}_i は i 番目の林分に隣接する林分のインデックスセットである。ここで a_{hl}^v が 1 の場合は h 番目の施業と l 番目の施業が同時期の伐採を行うことを意味している。その場合、 i 番目の林分に h の施業が施されると、隣接する j 番目の林分では l の施業を施すことがで

きない。(14) 式はその制約に対応している。Model II においては、緑化再生期間を g とし、下記となる。

$$\sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} x_{st}^i + \sum_{p=t+1}^{(t+g-1)\max(0,t+g-1-k)} \sum_{s=0} x_{sp}^j \leq 1, \quad \forall j \in \mathbb{NB}_i, \forall i, t = 1, \dots, T - g + 1 \quad (15)$$

3.2 混合 0-1 整数計画法による集約化問題への対応 (Area Restriction Model)

隣接制約の導入が始まった後、実際の現場で施業費用が増す小規模な林分への過度な分断が発生し、費用削減への規制緩和が始まった。そこで、隣接制約に対し、林分の集約をある程度許容する最大許容伐採面積規制 (maximum opening size requirements) が導入された。この規制はある程度の規模面積までの隣接伐採を許容するもので、隣接制約が分断化 (fragmentation) を促すのに対し、これは集約化 (aggregation) も許容するものである。日本においても低コスト林業の推進に伴い施業費用の削減に向けた林分の“団地化”が進められている。URM に対し、この種のモデルは Area Restriction Model (ARM) と呼ばれている。

集約化に伴う制約式の構築については、ルールに基づき候補となるクラスターの生成をもとにしたものが主流であった。PATH 定式 [21]、Cluster 定式 [22]、Bucket 定式 [23] がそれらである。集約化は境界線あるいは、境界点を共有する林分同士に加えて、それらに対

表 4 隣接制約と離散型 Model I と Model II の定式

離散型 Model I	離散型 Model II
$\max \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H L_i \cdot c_{ih} \cdot x_{ih}$	$\max \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T+1} \sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} L_i \cdot c_{st}^i \cdot x_{st}^i$
$\sum_{h=1}^H x_{ih} \leq 1, \quad \forall i$	$\sum_{t=1}^{T+1} x_{0t}^i = 1, \quad \forall i$
$(1 - \alpha) \cdot v_0 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^H L_i \cdot v_{ih}^t \cdot x_{ih} \leq (1 + \alpha) \cdot v_0, t = 1, \dots, T$	$(1 - \alpha) \cdot v_0 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} L_i \cdot v_{st}^i \cdot x_{st}^i \leq (1 + \alpha) \cdot v_0, t = 1, \dots, T$
	$\sum_{\tau=0}^{\max(0,s-k)} x_{\tau s}^i = \sum_{t=\min(s+k,T+1)}^{T+1} x_{st}^i, \quad \forall i, s = 1, \dots, T$
$a_{hl}^v \cdot x_{ih} + a_{lh}^v \cdot x_{jl} \leq 1, \quad \forall j \in \text{NB}_i, \forall i, \forall l (\neq h), \forall h$	$\sum_{s=0}^{\max(0,t-k)} x_{st}^i + \sum_{p=t+1}^{(t+g-1)} \sum_{s=0}^{\max(0,t+g-1-k)} x_{sp}^j \leq 1, \quad \forall j \in \text{NB}_i, \forall i, t = 1, \dots, T - g + 1$
$x_{ih} \in \{0, 1\}, \forall i, \forall h$	$x_{st}^i \in \{0, 1\}, \forall i, \forall s, \forall t$

注 N : 林分数, H : 施業数, T : 計画期間, k : 最小伐期齢

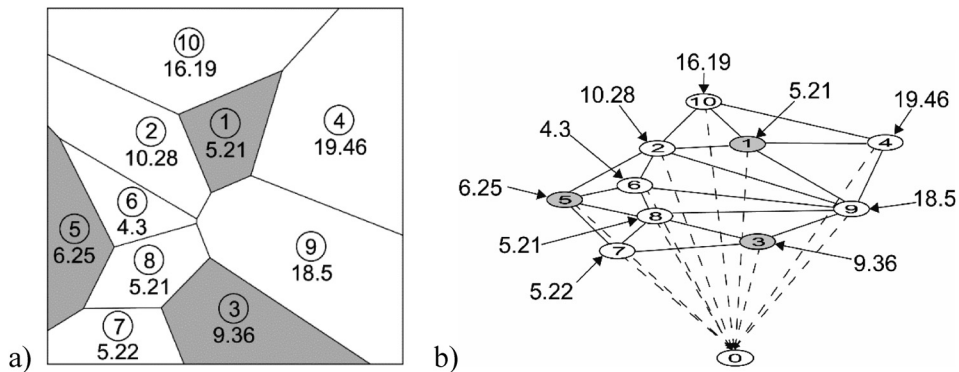


図 3 森林マップ例, a) 空間配置, b) グラフによる描写

してさらに逐次的に連続した林分の集合体を生成していく必要がある。吉本ら [24] や Yoshimoto et al [25] は、予め望む集約形状を考慮し、まず、逐次的な連結操作のルール設定に基づき林分集合体の候補を構築する方法を提示した。そして、それら候補の中から、重複する林分集合体同士の同時期選択を回避することにより、最適な林分集合体の組み合わせを探索するとした。なお、重複の回避は隣接制約に類似するものである。上記の方法は事前に候補となるクラスターを準備す

る必要があるため、対象とする林分の数、計画期間のサイズに制限があった。それに対し、Yoshimoto and Asante [26] は、最大フロー問題を用いて集約化を捉えるアプローチを提示した。

図 3 に森林マップの例を示す。ここで円内の番号は林分の ID、その下の数値が面積を示す。a) の空間配置をノードとアークからなるグラフで表すと b) となる。ここではスーパーノードとして架空のノード 0 を追加し、すべてのノードからの連結を仮定する。グレー

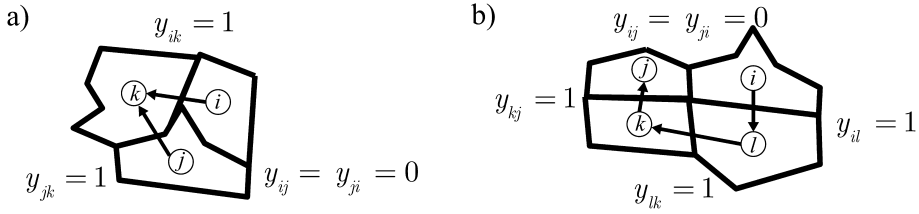


図 4 最大フローによる集約 a) 三つの隣接, b) 四つの隣接 (Yoshimoto and Asante [26])

のポリゴンは保護対象林分であるが、ここでは通常
 の林分として取り扱う。それぞれの面積を各ノードへの
 フロー、そしてすべてが他のノードを経由するか直接
 スーパーノード 0 に流れ、回収されるものとする。他
 のノードを経由する場合は、ノード同士の集約でクラ
 スターを形成し、ほかからの流入なしに直接スーパー
 ノードに流れるものは単独林分となる。次に各ノード
 からスーパーノードに流入する量が最大許容面積以下
 になるようにすれば、単なる集約だけの問題は解決で
 きる。次に集約に関わる制約を示す。

$$\left(\begin{array}{l} y_{ij} + y_{ji} \leq 1, \forall j \in \text{NB}_i, \forall i \\ y_{i0} + \sum_{j \in \text{NB}_i} y_{ij} = 1, \forall i \\ w_{ij} \leq \hat{L} \cdot y_{ij}, \forall j \in \text{NB}_i, \forall i \\ w_{i0} + \sum_{j \in \text{NB}_i} w_{ij} = \sum_{j \in \text{NB}_i} w_{ji} + L_i, \forall i \\ \sum_{i=1}^m w_{i0} = \hat{L} \\ w_{i0} \leq L_{\max} \\ y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall j \in \text{NB}_i, \forall i \end{array} \right) \quad (16)$$

バイナリー変数 y_{ij} は i 番と j 番目の林分間のアーク
 の結合を表し、1 なら結合となる。 w_{ij} は非負の変数で
 i から j ノードへの流量を示す。流れる流量とアーク
 の結合 (林分の集約) を上記の制約で規制でき、最終的
 にスーパーノードに流れる流量を最大許容面積 L_{\max}
 以下に制約すればよいことがわかる。ここで \hat{L} は総面
 積である。ここで注意する点は、最大フローで得られ
 るクラスター内の林分同士は最小のアーク連結で生成
 されていることである。つまりクラスター内の林分にお
 いてすべての隣接するアークが結合している訳では
 ない。仮にこの制約式群を伐採計画に適用しようとす
 れば、他の隣接制約により、たとえば三つの隣接し合
 う林分からなるクラスターは生成されず、隣同士のみ
 の連結による細長いクラスターのみが生成されてしま
 う。

最大フローにより得られるクラスター内の林分群
 ですべての隣接を結合し、隣接制約を回避するため

に、開発されたのが逐次三角連結 (Sequential Triangle
 Connection: STC) である。これは三つの隣接し
 合う林分の結合において、二つの結合が最大フローで
 選択されたら、選択されていない三つ目のアークを順
 次結合するものである。これまで隣接関係は境界線を
 基準にしていたが、STC では境界点での隣接関係も
 利用する。STC のアーク連結には新たにバイナリー
 変数 $y_{ij}^{B(n)}$ を導入し、第 $(n-1)$ 番目の STC 連結
 プロセスで (i, j) 間のアークが連結されれば 1 とす
 る。なお、 $y_{ij} = y_{ij}^{B(1)}$ である。たとえば図 4a) で
 は二つの隣接 ($y_{ik} = y_{jk} = 1$) が最大フローで結合
 されたとする。その場合、STC の初期条件として、
 $y_{ik} = y_{jk} = y_{ik}^{B(1)} = y_{jk}^{B(1)} = 1$ とし、3 番目の結
 合 $y_{ij}^{B(2)} = 1$ が STC により決定される。また図 4b)
 では (i, l, k) が境界線と境界点で互いに隣接関係にあ
 るため、 $y_{il} = y_{kl} = y_{il}^{B(1)} = y_{kl}^{B(1)} = 1$ が $y_{ik}^{B(2)} = 1$
 を導く。同様に $y_{jk} = y_{jk}^{B(1)} = y_{jk}^{B(2)} = 1$ 、さらに
 $y_{ij}^{B(3)} = 1$ となり、本クラスター内の林分群において
 すべての隣接が結合される。このような STC の操作
 を式で表したものが下記である。

$$\begin{aligned} y_{ij}^{B(0)} &= y_{ij} + y_{ji}, \forall j \in \text{NB}_i, \forall i, (i < j) \\ 2 \cdot u_{ijk}^{(n)} + 3 \cdot \sum_{l=1}^{n-1} u_{ijk}^{(l)} &\leq \sum_{l=1}^n \{y_{ij}^{B(l)} + y_{ik}^{B(l)} + y_{jk}^{B(l)}\} \\ &\leq 2 \cdot u_{ijk}^{(n)} + 3 \cdot \sum_{l=1}^{n-1} u_{ijk}^{(l)} + 1, \\ &\forall j \in \text{MB}_i, \forall i, \forall k \in (\text{MB}_i \cap \text{MB}_j), \\ &n = 1, \dots, N-1 \\ 3 \cdot u_{ijk}^{(n)} &\leq \sum_{l=1}^{n+1} \{y_{ij}^{B(l)} + y_{ik}^{B(l)} + y_{jk}^{B(l)}\}, \\ &\forall j \in \text{MB}_i, \forall i, \forall k \in (\text{MB}_i \cap \text{MB}_j), \\ &n = 1, \dots, N-1 \\ y_{ij}^{B(n+1)} &\leq \sum_{k \in (\text{MB}_i \cap \text{MB}_j)} u_{ijk}^{(n)}, \\ &\forall j \in \text{MB}_i, \forall i, n = 1, \dots, N-1 \\ \sum_{l=1}^N y_{ij}^{B(l)} &\leq 1, \forall j \in \text{MB}_i, \forall i \end{aligned} \quad (17)$$

ここで $w_{ijk}^{(n)}$ は第 n 回目の STC プロセスにより互いに隣接する (i, j, k) からなる三角連結の成立を示すバイナリー変数であり、 \mathbb{NB}_i は i 番目の林分に境界線および境界点を通して隣接となる林分のインデックスセットである。

以上、集約によるクラスターの形成は最大フローおよび STC により可能になる。最後に空間的な集約と伐採活動を紐づける必要がある。すなわち、Model I ではクラスター内の林分に対して同一施業を施すことにより、クラスター内すべての林分を同時期に伐採する“クラスター伐採”を実現させる。それに対して、Model II では同時期の“クラスター伐採”を実現するように制約すればよい。Model I を用いると下記の制約が必要となる。

$$\left(\begin{array}{l} 2 \cdot z_{ij}^h \leq x_{ih} + x_{jh} \leq 2 \cdot z_{ij}^h + 1, \\ \forall j \in \mathbb{NB}_i, \forall i, \forall h (\neq 0) \\ \sum_{n=1}^N y_{ij}^{B(n)} = \sum_{h=1}^H z_{ij}^h, \\ \forall j \in \mathbb{NB}_i, \forall i \\ a_{hl}^v \cdot x_{ih} + a_{lh}^v \cdot x_{jl} \leq 1, \\ \forall j \in \mathbb{NB}_i, \forall i, \forall l (\neq h), \forall h \end{array} \right) \quad (18)$$

ここで新たなバイナリー変数 z_{ij}^h を導入し、隣接する i と j 番目の林分に h 番目の施業が実施されるときに 1 となる。施業が異なるが、同一時期での伐採を伴う施業に対しては、3 番目の制約式により同時伐採を回避できる。一方 Model II に対しては、下記で対応できる。

$$\left(\begin{array}{l} 2 \cdot z_{ij}^t \leq \sum_{s=0}^{\max(0, t-k)} (x_{st}^i + x_{st}^j) \leq 2 \cdot z_{ij}^t + 1, \\ \forall j \in \mathbb{NB}_i, \forall i, t = 1, \dots, T \\ \sum_{n=1}^N y_{ij}^{B(n)} \leq \sum_{t=1}^T z_{ij}^t \leq K_{\max} \cdot \sum_{n=1}^N y_{ij}^{B(n)}, \\ \forall j \in \mathbb{NB}_i, \forall i \end{array} \right) \quad (19)$$

Model I の z_{ij}^h に対し、Model II では隣接する i と j 番目の林分が t 期に伐採されるとき 1 になるバイナリー変数が z_{ij}^t である。 K_{\max} は計画期間内で実施可能な伐採の最大数である。これら (18) あるいは (19) 式により集約された林分の同時期でのクラスター伐採などの対応が可能になり、伐採計画の制約、集約の制約、およびそれらを連結する制約により、最大伐採許容面積制約下での伐採計画最適化が可能になる。なお、Yoshimoto and Asante [26] は Model I を軸にした

ものを MF-Model I、Yoshimoto and Asante [15] で Model II によるものを MF-Model II と命名している。また、Model I に対して施業の概念を使用せずに同時期のクラスター伐採を実現することも可能である [15]。

上記の伐採計画に伴う集約と同時に 1990 年代から 2000 年代に入ると森林の空間構造の重要性が議論され始めた [27, 28]。たとえば、前述のマダラフクロウは、老齢林のような複雑な森林構造をもつ植生が、ある一定の面積で空間的に広がった森林に生息するといわれている [29]。また、野生動植物の生息地を繋ぎ、それらの移動を可能にするコリドー（緑の回廊）の設計も連続性を考慮しなければならない。このような問題を Natural reserve network 問題とし、数多くの論文が OR 関連の論文誌で発表されているが、基本的にここで提示した集約問題と同様に対応できる。そのほかにも、上記アプローチはある保護区の拡張を狙った周辺バッファーとの結合にも対応できる [30]。

4. おわりに

森林資源の成長において、“時間”は非常に重要な投入要素であり、森林は長期的な視野に基づいて管理する必要がある。それゆえ、紀元前から収穫といった森林資源利用に対する管理が重要視されてきた。そして、16-17 世紀には、木材供給の予測や輪伐（ローテーション）といった、長期的な視野に基づく持続的な資源管理の考え方が出てきた。19 世紀に入るとドイツで保続収穫の考え方が提唱され始め、それに伴い“法正林”という保続収穫を可能にする“理想的な”計画モデルが考案された [31]。“法正林”は、すべての林齢クラスが同じ面積で存在する森林で、理論的には、成長量と等しい材積の収穫が每期可能になるため、永続的に一定量の木材が供給できる森林であるとしている。毎回同じ施業を繰り返し、同じ量の収穫を得る森林は必ずしも上記の条件を満たす必要はなく、鈴木氏が提唱した林齢遷移を考慮すれば、その行列の固有値問題として状態が変わらない、“不動点”を探索することができる。これを鈴木氏 [1] は“広義の法正林”とした。日本においては、ドイツ林業の影響を強く受け、かつて森林保続思想をもつ研究者、それに対抗する林野行政の間で“保続か経営か”をめぐる長い論争があったそうである。

20 世紀に入ると、世界大戦の影響もあり、木材需要が高まり、消費者の動向や木材市場の分析が展開された。この時期には、より短期的な経済効率性が管理の指標となり、経済理論に基づいた手法による森林管理

の計画が検討された [32]. そして, 本稿で紹介したような OR の手法が, 実社会のさまざまな森林資源管理の問題解決に応用され始めた. 近年, 木材生産から森林の環境的な機能に対する社会の関心が変化し, 木材生産とのトレードオフ評価が可能な線形計画法の応用が進んできた.

世紀の後半 1980 年代に入ると, 大規模な皆伐が森林に生息する野生動物の生息地破壊に繋がっているとの批判から, 森林の環境的な役割を考慮するうえで, 伐採地の空間配置を制御することが必要であるという考え方が広まった. これに対応すべく混合 0-1 整数計画法が応用され, 隣接する林地の同時期伐採を回避する制約条件を導入したさまざまな最適化モデルが考案された. これらのモデルは, コンピュータ技術の発展と OR 手法の発展に伴い 1990 年代から 2000 年代にかけて, さらに改良・拡張が施され, 連続性などの空間構造も制御できるモデルへと発展していった. そして, 近年, 世界各地で頻発する大規模森林火災や病害虫の拡散, 侵略的外来種の移入・拡散といった空間的な拡散プロセスを伴うさまざまな被害に対して, 有効な管理を実施することが重要な課題となってきた. 空間拡散プロセス予測モデルと混合 0-1 整数計画法といった最適化モデルを結合した新たな最適化システムが開発され [33], 管理の空間配置と被害拡散の相互作用を踏まえながら, 最適な資源管理を時空間的に探索するような研究が今後ますます展開されていくだろう. このように, 森林資源管理に関する最適化モデルの開発は, 森林資源を取り巻く社会ニーズの変化とともに, 異なる手法の応用であったり, モデルの改良・拡張を繰り返しながら, 発展してきた.

先に取り上げた減反率に関する研究は現在それほど進展がない. その大きな理由が減反率を推定する確率過程によるモデリングにこだわっているからのように思える. 実際の伐採の傾向は木材価格, 管理費用, 利子率といった経済的な要因によって変動するため, 単純ポアソン過程から導出されるガンマ分布による減反率の推定は適切ではないことは明らかである. これまで確率過程に基づいた推定法の確立と減反率推定を結び付けた研究が進んできたが, 実際の伐採動向を見る限り, それらは切り離して対応すべき研究内容である. 減反率はその分布を描写することにより伐採率がわかる. 仮に実際の伐採率の時系列データと他のファンダメンタルズに基づき, パラメトリック, ノンパラメトリックなどの統計的手法により“減反率分布”を推定し, 分布予測が可能になれば, 伐採動向の予測も可能

になる. OR 手法の応用にはならないかもしれないが, 今後の研究の発展に期待したい.

ここでは取り上げなかったがほかにも Samuelson [34] による空間均衡モデルを用いた世界木材貿易モデル GFPM (Global Forest Products Model) [35] や日本を中心にした木材貿易モデル JAFSEM (Japanese Forest Sector Model) [36] も OR 手法を応用したモデルである. 今後複雑化する社会ニーズ, 自然環境下で如何に森林資源を持続的に効率良く管理していくかは, OR 研究の成果に依存するところが大きい. 北米, 南米など森林産業が国内の GDP に貢献するところでは, 効率的な資源管理を遂行するためにさまざまなシステムが開発されコンサルティングも行われている. これに対し, ドイツ思想が根強く残る日本においては, データサイエンスを用いた科学的根拠に依存しない思想的な資源管理がまん延しているように感じる. その大きな原因が, 日本においては未だエンドユーザーである森林所有者, 森林組合, 行政が容易に利用できるような資源管理システムが存在しないからではと常に感じている. 最適化モデルの開発とともに, そうしたシステムの開発が今後日本における森林資源管理に役立つものとなる.

参考文献

- [1] 鈴木太七, 『森林経理学』, 朝倉書店, 1979.
- [2] 鈴木太七, 『木材の生産予測について (I)』, 科学技術庁資源局, 1961.
- [3] 鈴木太七, 『木材の生産予測について (II)』, 科学技術庁資源局, 1963.
- [4] 鈴木太七, “遷移確率行列による収穫予定,” 日林関東支論, **10**, pp. 36–38, 1959.
- [5] 広嶋卓也, “コラム 3.2. 減反率と広義の法正林, 地域資源の見通し,” 『森林計画学入門』, 田中和博, 吉田茂二郎, 白石則彦, 松村直人 (編), 朝倉書店, pp. 43–45, 2020.
- [6] 藤掛一郎, “森林資源構成表を用いた減反率の推定,” *FORMATH*, **2**, pp. 159–178, 2003.
- [7] P. Blandon, “Gentan probability and censored sample theory (I),” *Journal of Japanese Forestry Society*, **73**, pp. 187–196, 1991.
- [8] A. Yoshimoto, “A new stochastic model for harvesting behavior with application to nonstationary forest growth and supply,” *Canadian Journal of Forest Research*, **26**, pp. 1967–1972, 1996.
- [9] A. Yoshimoto, “Economic analysis of harvesting behavior using the modified Gentan probability theory,” *Journal of Forest Research*, **1**, pp. 67–72, 1996.
- [10] A. Yoshimoto, “Gentan probability analysis with a state-dependent discrete forest growth model,” *Journal of Forest Research*, **6**, pp. 101–110, 2001.
- [11] A. Yoshimoto, “Application of the Logistic, Gompertz, and Richards growth functions to Gentan probability analysis,” *Journal of Forest Research*, **6**, pp. 265–272, 2001.

- [12] J. Martin and P. E. Sendak, *Operations Research in Forestry: A Bibliography*, U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Northeastern Forest Experiment Station, 1973.
- [13] K. N. Johnson and H. L. Scheurman, "Techniques for prescribing optimal timber harvest and investment under different objectives: Discussion and synthesis," *Forest Science Monograph*, **18**, 1977.
- [14] O. Garcia, "Linear programming and related approaches in forest planning," *New Zealand Journal of Forestry Science*, **20**, pp. 307–331, 1990.
- [15] A. Yoshimoto and P. Asante, "Inter-temporal aggregation for spatially explicit optimal harvest scheduling under area restrictions," *Forest Science*, **67**, pp. 587–606, 2021.
- [16] K. N. Johnson, D. B. Jones and B. M. Kent, *A user's guide to the forest planning model (FORPLAN)*, Fort Collins, U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Land Management Planning, 1980.
- [17] P. A. Arp and D. R. Lavigne, "Planning with goal programming: A case study for multiple-use of forested land," *Forestry Chronicle*, **58**, pp. 225–232, 1982.
- [18] A. Muray, "Spatial restrictions in harvest scheduling," *Forest Science*, **45**, pp. 45–52, 2018.
- [19] A. Murray and R. L. Church, "Measuring the efficacy of adjacency constraint structure in forest planning models," *Canadian Journal of Forest Research*, **25**, pp. 1416–1424, 1994.
- [20] A. Yoshimoto and M. Konoshima, "Spatially constrained harvest scheduling for multiple harvests by exact formulation with common matrix algebra," *Journal of Forest Research*, **21**, pp. 15–22, 2016.
- [21] M. E. McDill, S. Rebain and J. Braze, "Harvest scheduling with area-based adjacency constraints," *Forest Science*, **48**, pp. 631–642, 2002.
- [22] M. Goycoolea, A. T. Murray, F. Barahona, R. Epstein and A. Weintraub, "Harvest scheduling subject to maximum area restrictions: Exploring exact approaches," *Operations Research*, **53**, pp. 490–500, 2005.
- [23] M. Constantino, I. Martins and J. G. Borges, "A new mixed-integer programming model for harvest scheduling subject to maximum area restrictions," *Operations Research*, **56**, pp. 542–551, 2008.
- [24] 吉本敦, 木島真志, 柳原宏和, "隣接空間制約による林分団地化最適パターンの探求," *統計数理*, **58**, pp. 113–126, 2010.
- [25] A. Yoshimoto, P. Asante and M. Konoshima, "Optimal forest stand aggregation and harvest scheduling using compactly formulated integer programming," *FORMATH*, **16**, pp. 22–31, 2017.
- [26] A. Yoshimoto and A. P. Asante, "A new optimization model for spatially constrained harvest scheduling under area restrictions through maximum flow problem," *Forest Science*, **64**, pp. 392–406, 2018.
- [27] E. Z. Baskent and G. A. Jordan, "Designing forest management to control spatial structure of landscapes," *Landscape and Urban Planning*, **34**, pp. 55–74, 1996.
- [28] E. Z. Baskent and S. Keles, "Spatial forest planning: A review," *Ecological Modelling*, **188**(2-4), pp. 145–173, 2005.
- [29] A. B. Franklin, D. R. Anderson, R. J. Gutiérrez and K. P. Burnham, "Climate, habitat quality, and fitness in northern spotted owl populations in northwestern California," *Ecological Monographs*, **70**, pp. 539–590, 2000.
- [30] A. Yoshimoto, and A. P. Asante, "Focal-point aggregation under area restrictions through spatially constrained optimal harvest scheduling," *Forest Science*, **65**, pp. 164–177, 2019.
- [31] D. Rose and T. E. Burk, "Development of a model for simulation of forest regulation techniques," *Agricultural Experiment Station University of Minnesota, Technical Bulletin*, No. 324, 1980.
- [32] W. A. Duerr, J. Fedkiw and S. Guttenberg, "Financial maturity: A guide to profitable timber growing," *U.S. Department of Agriculture Technical Bulletin*, No. 1146, 1956.
- [33] A. Yoshimoto, M. Konoshima, P. Surovy and P. Asante, "Integer programming approach to control invasive species spread based on cellular automaton model," *Natural Resource Modeling*, **30**, pp. 1–42, 2017.
- [34] P. A. Samuelson, "Spatial price equilibrium and linear programming," *American Economic Review*, **41**, pp. 284–303, 1952.
- [35] P. Nepal, J. Buongiorno, C. M. T. Johnson, F. Prestemon and J. Guo, "Global forest products trade model," *International Trade in Forest Products: Lumber Trade Disputes, Models and Examples*, G. C. van Kooten & L. Voss (eds.), Oxfordshire, pp. 110–141, 2021.
- [36] A. Yoshimoto and K. Yukutake, "Japanese forest sector modeling through a partial equilibrium market model," *Journal of Forest Research*, **7**, pp. 41–48, 2002.