令和 4 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2023 年 2 月 4 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E-1

財 x, y を消費する 1 単位の家計が存在し、その効用関数 $U = 3x - x^2 + y$ と予算制約 $2 = px + ry$ が与えられている。ただし $p, r, x, y \geq 0$ とする。

(1) 財 x の需要関数を求めなさい。また $p = 2$, $r = 6$ が与えられたときの x の需要を数値で示しなさい。

(2) x 財の生産関数を $L^{2/3}K^{1/3}$ とし、生産要素 L, K の価格をそれぞれ 1/2, 2 で与える。1 単位の x を生産するための最小費用を求めなさい。

(3) x 財が独占企業によって供給される時の市場均衡価格を求めなさい。ただし、生産関数と要素価格は (2) と同じであり、y 財の価格は $r = 1$ に固定されている。

[English] There is one unit of households consuming goods x and y with utility function $U = 3x - x^2 + y$ and budget constraint $2 = px + ry$, where $p, r, x, y \geq 0$.

(1) Show the demand function for good x. Also, compute the demand for x when $p = 2$ and $r = 6$ are given.

(2) Suppose that the production function of good x is $L^{2/3}K^{1/3}$ and the prices of production inputs L and K are 1/2 and 2, respectively. Show the minimum cost to produce 1 unit of x.

(3) Show the market equilibrium price when good x is supplied by a monopolistic firm, where the production function and the input price are the same as (2), and the price of good y is given by $r = 1$.

令和 4 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2023 年 2 月 4 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–2

1. リスク中立的な 2 人のプレイヤー A、B が、次のようなゲームをプレイする。各プレイヤーは “rock(R)” “paper(P)” “scissors(S)” のいずれかを同時に選択する。R は S に、P は R に、S は P にそれぞれ勝ち、2 人が同じ戦略を選んだ場合は引き分けとなる。各プレイヤーの利得は、勝った場合 1 、引き分けの場合 0.5, 負けた場合 0 とする。

(1) プレイヤー A が、R, P, S をそれぞれ確率 1/5, 2/5, 2/5 でランダムに選ぶ混合戦略を実行するとする。この戦略に対するプレイヤー B の最適反応戦略を示しなさい。

(2) このゲームの (混合戦略) ナッシュ均衡を示しなさい。

(3) プレイヤー A が R,P のみを選択できるというルール変更が行われた場合の、(混合戦略) ナッシュ均衡を求めなさい。両方のプレイヤーはルール変更について知っているものとする。

2. 労働者の時間あたり賃金と労働時間の関係を表す労働供給曲線の性質について、財供給曲線との違いに注目して説明しなさい。

[English]

1. Two risk-neutral players, A and B, play the following game: Each player selects “rock(R)”, “paper(P)”, or “scissors(S)” simultaneously. R beats S, P beats R, and S beats P, and a draw is scored if two players choose the same strategy. Each player’s payoff is 1 for a win, 0.5 for a draw, and 0 for a loss.

(1) Suppose that player A plays a mixed strategy in which R, P, and S are randomly selected with probabilities 1/5, 2/5, and 2/5, respectively. Show player B’s best response to this strategy of A.

(2) Show the (mixed strategy) Nash equilibrium in this game.

(3) Show the new (mixed strategy) Nash equilibrium if player A can only select either R or P. Both players know this rule change.

2. Provide some properties for the relationship between workers’ hourly wages and working hours by a labor supply curve, focusing on the differences from the supply curves of goods.

令和4年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2023年2月4日)

専門試験科目群第7・社会科学群

問題 E–3 1. 関数 $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ (ただし, $x \in (-1, 1)$) に対して、(a) $f^{-1}(3)$ と $(f^{-1})'(3)$ を求めなさい; (b) $f(x)$ の x^3 までの Taylor 展開 (Maclaurin 展開) しなさい; (c) 前項の (b) を利用して $\ln 2 = f(1/3)$ の小数第2位までの近似値を求めなさい。

2. 積分 $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ を計算しなさい。ただし、$g(x)$ は下記の $(n+1) \times (n+1)$ の行列式である：

$$g(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

[English] 1. Function $f(x)$ is defined by $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, where $x \in (-1, 1)$. (a) Calculate $f^{-1}(3)$ and $(f^{-1})'(3)$. (b) Make the Taylor expansion (Maclaurin expansion) of $f(x)$ up to x^3. (c) Give an approximate value of $\ln 2 = f(1/3)$ by rounding off to 2 decimal places based on the result of (b).

2. Calculate $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$, where $g(x)$ is the following $(n+1) \times (n+1)$ determinant:

$$g(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

令和 4 年度実施

東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期・入学試験問題 (2023 年 2 月 4 日)

専門試験科目群第 7・社会科学群

問題 E–4 連続値をとる説明変数 $x \in (-\infty, \infty)$ と、二値を取る被説明変数 $y \in \{0, 1\}$ において、$y = 1$ をとる確率と $y = 0$ をとる確率の比の対数が

$$\ln\left[\frac{p(y=1)}{p(y=0)}\right] = a + bx \tag{i}$$

で表されるモデルを考える。(1) $p(y) = \dfrac{e^{y(a+bx)}}{1+e^{a+bx}}$ と書けることを示しなさい。(2) 説明変数と被説明変数の組からなるデータ $\{(x_i, y_i); i = 1, 2, \cdots, n\}$ に対して、対数尤度関数が極値をとる a, b に対する条件（一階条件）を求めなさい。(3) 確率変数 u の累積分布関数が $F(u) = \exp[-e^{-u}]$ で表されるとする。このとき、確率密度関数 $f(u)$ を求めなさい。(4) x が個人の属性を表し、y が選択を表すとする。$y = 0$ を選択したときの効用関数を $V_0(x) = \alpha_0 + \beta_0 x + u_0$、$y = 1$ を選択したときの効用関数を $V_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 x + u_1$ とする。u_0 と u_1 は x と独立な、累積分布関数 $F(u)$ に従う確率変数である。ある x に対して、$V_1(x) > V_0(x)$ であるときに $y = 1$ を選択すると仮定すると、$y = 0$ をとる確率と $y = 1$ をとる確率は (i) 式を満たすことを示しなさい。また、a, b を $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ を用いて表しなさい。

[English] Let $x \in (-\infty, \infty)$ be a continuous explanatory variable and $y \in \{0, 1\}$ a binary explained variable. Consider a model in which the logarithm of the ratio of the probabilities of $y = 1$ to $y = 0$ is given by

$$\ln\left[\frac{p(y=1)}{p(y=0)}\right] = a + bx. \tag{i}$$

(1) Show $p(y) = \dfrac{e^{y(a+bx)}}{1+e^{a+bx}}$. (2) For a dataset of the explanatory and the explained variables $\{(x_i, y_i); i = 1, 2, \cdots, n\}$, give the first-order conditions for extrema of the log-likelihood function with respect to a and b. (3) Assume that the cumulative distribution function for the random variable u follows $F(u) = \exp[-e^{-u}]$. Give the probability density function $f(u)$. (4) Assume that x and y represent the attribute and the choice of a person. Let $V_0(x) = \alpha_0 + \beta_0 x + u_0$ and $V_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 x + u_1$ be the utility functions for choices $y = 0$ and $y = 1$, respectively, where random variables u_0 and u_1 are independent of x and follow the cumulative distribution function $F(u)$. Assume that $y = 1$ is chosen if and only if $V_1(x) > V_0(x)$ holds, show that the probabilities of $y = 0$ and $y = 1$ satisfy Eq. (i). Moreover, express a, b in terms of $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$.